Программа экзамена по математическому анализу, 3 семестр

I-я ЧАСТЬ

Мера. Примеры мер. Алгра, кольцо, полукольцо. Произведение полуколец. Начальные утверждения о мерах на (полу)кольцах. Элементарный интеграл по мере на полукольце (полное построение, свойства). Применения элементарного интеграла (произведение мер, заданных на полукольцах; полуаддитивность меры). Счетная аддитивность, элементарные примеры. Регулярные меры. Стилтьесова длина, ее регулярность. Теорема А.Д.Александрова. Счетная аддитивность объъема на полукольце конечных параллелепипедов. σ -алгебры; существование наименьшей σ-алгебра, содержащей данную систему множеств. Достаточные условия для того, чтобы система множеств была σ-алгеброй. Переформулировки и следствия условия счетной аддитивности. Внешняя мера, ее свойства. Предмеры. Теорема Лебега-Каратеодори, стандартное продолжение меры. Полнота стандартного продолжения. Мера Лебега в Rn. Измеримость борелевских множеств по Лебегу. Структура измеримых множеств, роль условия σ-конечности. Теоремы единственноси продолжения. Инвариантность меры Лебега относительно сдвига. Двоичные кубы, их свойства. Описание мер, инвариантных относительно сдвига. Отображения, измеримые по Борелю; измеримость по Борелю непрерывных отображений. Образ измеримого множества при липшицевом гомеоморфизме. Преобразование меры Лебега при линейном отображении. Регулярность меры Лебега. Малая теорема Леви.

Измеримость отображения: самый общий случай и случай отображения пространства с мерой в топологическое пространство. Система образующих σ-алгебры, проверка измеримости на образующих. Измеримость отображения, принимающего значения в топологическом пространстве со счетной базой. Композиция измеримых отображений. Измеримые функции, их начальные свойства. Измеримость ступенчатой функции, сохранение измеримости при взятии граней последовательности функций и при переходе к пределу. Приближение измеримых функций ступенчатыми и простыми.

Интеграл от неотрицательной измеримой функции: определение, монотонность, неравенство Чебышева, теорема Леви для неотрицательных измеримых функций, линейность интеграла на неотрицательных функциях, счетная аддитивность интеграла. σ-конечность носителя суммируемой функции. Абсолютная непрерывность интеграла. Интеграл от измеримой функции произвольного знака: определение, корректность определения, линейность, общая теорема Леви, лемма Фату. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Интегрируемость по Лебегу всех функций, интегрируемых по Риману-Дарбу.

Счетная аддитивность произведения счетно-аддитивных мер, заданного на полукольце обобщенных прямоугольников. Теоремы Тонелли и Фубини. Объем подграфика.

Пространство L1, метрика в нем. Плотность множества непрерывных функций в L1.

Теорема Радона-Никодима (**для тех, кто сдает только часть 1 – без доказательства**). Единственность представления. Вариант теоремы Радона-Никодима для σ-конечной меры. Формула для интеграла по мере с плотностью. Применение теоремы Радона-Никодима к локально-липшицевым гомеоморфизмам. Формула преобразования меры при дифференцируемом отображени и ее варианты. Максимальная функция Харди-Литлбуда (для измеримых функций; для мер). Слабый тип (1,1) для максимальной функции Харди-Литлвуда на мерах.

Дифференциальный базис в Rn. Теорема о диференцировании интегралов по базису, точки Лебега. Следствия (частные случаи). Доказательство формулы преобразования меры Лебега при гладком невырожденном отображени.

Матрица Грама линейного отображения и мера Лебега на его образе. Эвристическая формула для меры Лебега на куске многообразия, заданном одной локальной картой. Инвариантность этой формулы при смене карты. Применение формулы Бине-Коши. Случай гиперповерхности, связь плотности меры с внешней нормалью. Формула Остроградского-Гаусса (рассуждение на не вполне строгом уровне).

Классы Lp, неравенства Гёльдера и Минковского. Плотность непррерывных функций в Lp. Непрерывность сдвига в среднем. Свертка, существование свертки двух суммируемых функций. Стандартная аппроксимативная единица, построенная по суммируемой функции; приближение свертками с такой аппроксимативной единицей. Дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра, применения к приближению с помощью сверток.

II-я ЧАСТЬ

Оценка максимальной функции Харди-Литлвуда в Lp.О сходимости п.в. сверток с аппроксимативной единицей. Неравенство Юнга.

Вещественные (знакопеременные) и комплексные меры. Интеграл от комплексной функции по неотрицательной мере, основная оценка для интеграла. Ограниченность множества значений комплексной меры. Разложение Хана. Представление вещественной меры в виде разности положительных. Формулы для положительной и отрицательной частей вещественной меры. Абсолютная непрерывность одной меры относительно другой, теорема Радона-Никодима (случай комплексной меры). Существование граней в пространстве L1. Доказательство теоремы Радона-Никодима. Единственность в теореме Радона-Никодима для комплексных мер.

Сингулярные меры, лебегово разложение. Случай мер на отрезке, лебегово разложение монотонных функций.Дифференцирование произвольных (не обязательно абсолютно непрерывных) мер.

Образ меры при отображении пространств. Формула для интегрирования по образу меры. Распределение и функция распределения суммируемой функции. Вторая функция распределения и выражение интегралов через нее. Формула интегрирования по частям для интеггралов Лебега-Стилтьеса и ее применение к интегралам с функциями распределения.

Полная вариация меры. Вычисление полной вариации меры, имеющей плотность. Полная вариация произвольной меры есть положительная мера. Интеграл относительно меры, имеющей плотность. Интеграл относительно комплексной меры. Плотность комплексной меры относительно ее полной вариации. Основная оценка для интеграла от комплексной функции по комплексной мере. Вариант теоремы Лебега о сходимости для интегралов по комплексной мере.

Предмеры Хаусдорфа Теорема об измеримости борелевских множеств относительно некоторых специальных предмер на метрическом пространстве, проверка того, что хаусдорфовы предмеры – таковы. Хаусдорфова размерность множества. Хаусдорфова размерность пространства Rn и идентификация n-мерной меры Хаусдорфа в Rn. k-мерная мера Хаусдорфа на k-мерной аффинной плоскости. Мера Хаусдорфа образа множества при липшицевом отображении. Мера Лебега на многообрази: доказательство формулы.Варианты формулы для случая гиперповерхности.

Кососимметричные полилинейные формы, внешнее произведение, внешний дифференциал, свойства. Замена переменных в дифференциальной форме.Интеграл от дифференциальной формы по многообразию. Формула Стокса. Формула Остроградского-Гаусса, направление нормали при согласовании ориентаций. Формула Грина для оператоа Лапласа. Замкнутые и точные формы.

Теорема Егорова.. Сходимость по мере, последовательности Коши по мере. Квазиравномерная сходимость, ее взаимоттношения со сходимостью по мере и п.в. Выделение квазиравномерно сходящейся подпоследовательности из пследовательности Коши по мере. Полнота при сходимости по мере.. Следствие о взаимоотношениях сходимости по мере и сходимости п.в.

Сходимость в Lp  и сходимость по мере, полнота пространств Lp. Существенный супремум: определение, описание. Пространство L∞, его полнота. Плотность простых и элементарных функций в классах Lp. Теорема Лузина.

Теорема Рисса о представлении: формулировка, единственность представляющей меры.Существование: построение предмеры, ее свойства; измеримость всех борелевских множеств; доказательство того, что построенная мера представляет исходный функционал.